

考虑位移效应的土压力计算理论

杨泰华^{1,2}, 贺怀建¹

(1. 中国科学院武汉岩土力学研究所, 武汉 430071; 2. 武汉科技大学 城市建设学院, 武汉 430070)

摘 要: 基于朗肯土压力理论, 假定填土的内摩擦角与该点土体位移呈非线性关系, 进而提出挡土墙的主动和被动土压力的计算模式。该模式随位移变化是连续的, 且能考虑墙土间的摩擦的影响。又将其与砂土模型试验结果进行了对比分析, 吻合较好, 从而证明用该计算模式计算其主动或被动土压力是合理的。此外, 根据该计算模式, 导出了一种有效估算其静止土压力系数的计算方法。

关 键 词: 位移效应; 土压力; 计算理论; 非极限状态

中图分类号: TU 413.6

文献标识码: A

Earth pressure calculation theory considering displacement effects

YANG Tai-hua^{1,2}, HE Huai-jian¹

(1. Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China;

2. College of Urban Construction, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430070, China)

Abstract: Based on Rankine's earth pressure theory, assuming the internal friction angle of backfill and the displacement are in nonlinear, a calculation model for calculating the passive and active earth pressure acted on the retaining wall is put forward. This model is continuous with displacement variation and can consider the friction of interface between soil and wall. By contrasting the calculated results and the model test results of sands, it is shown that they can agree with each other very well. So it is reasonable to use the calculation model to calculate the active or passive earth pressure. In addition, according to the calculation model, the paper deduces a new kind of effective calculation method to estimate static earth pressure coefficient.

Key words: displacement effects; earth pressure; calculation theory; non-limit equilibrium state

1 引 言

目前, 工程上对于挡土墙或支护结构上的土压力的计算大多采用朗肯理论或库仑理论, 然而, 朗肯和库仑土压力理论都是一种极限土压力理论, 而达到极限状态所需要的位移量往往不被工程所允许 (尤其是达到被动极限状态所需位移量远远超出了工程允许范围)。国内外众多学者的研究表明, 墙体变位模式和位移的大小对挡土墙土压力分布有很大的影响^[1-5]。Bang^[1]认为, 土体从静止状态到极限状态是一个渐变的过程, 提出了非极限状态的概念, 指出土压力计算应同时考虑墙体变位模式和位移的大小。对此, Fang^[2]、徐日庆^[3]、周应英等^[6]对墙体平动、绕墙底转动和绕墙顶转动 3 种变位模式下的土压力进行了模型试验研究。Chang^[7]通过对不同位移模式下土体抗剪强度的发挥采用一种简单的方式

表达, 假定填土内摩擦角、墙土摩擦角的发挥与该点土体的位移呈线性关系, 对绕墙脚转动时的挡土墙的非极限主动土压力进行了计算。蒋波等^[8]假设摩擦角与位移呈线性关系对平移模式下的挡土墙非极限主动土压力进行了计算。

笔者在前人研究的基础之上, 基于朗肯土压力的基本原理, 假定填土的内摩擦角与该点土体位移呈非线性关系, 进而提出挡土墙的主动和被动土压力的计算通式, 并将其与模型试验结果进行对比分析, 论证其合理性。

2 基本理论及原理

2.1 朗肯土压力理论

朗肯土压力理论是通过研究弹性半空间体内的应力状态, 根据土的极限平衡得出的土压力的计算方法如图 1 所示。由图可见, ①当挡土墙静止时,

墙后土体处于弹性平衡状态, 竖向应力 $\sigma_z = \gamma z$, 水平向应力 $\sigma_x = k_0 \gamma z$, 见图 1(a); ②当挡土墙向左移动时, σ_z 不变, σ_x 逐渐减小。当位移量 $s = s_a$ 时, 墙后土体达到主动极限平衡状态, 竖向应力为大主应力, 即 $\sigma_z = \gamma z = \sigma_1$, 水平向应力为小主应力, 即 $\sigma_x = \sigma_a = \sigma_3$, 此时滑裂面与大主应力作用面 (水平面) 成 $\alpha = 45^\circ + \varphi/2$ 的夹角, 见图 1(b)、1(d); ③当挡土墙向右移动时, σ_z 不变, σ_x 逐渐增大并超过 σ_z 。当位移量 $s = s_p$ 时, 墙后土体达到被动极限平衡状态, 水平向应力为大主应力, 即 $\sigma_x = \sigma_p = \sigma_1$, 竖向应力为小主应力, 即 $\sigma_z = \gamma z = \sigma_3$, 此时滑裂面与大主应力作用面 (竖直面) 成 $\alpha = 45^\circ + \varphi/2$ 的夹角, 即与水平面成 $\alpha' = 45^\circ - \varphi/2$, 见图 1(b)、1(d)。又根据图 1(d) 中的三角关系, 则 $\beta = 90^\circ - \alpha = 45^\circ - \varphi/2$, $\beta' = 90^\circ - \alpha' = 45^\circ + \varphi/2$ 。将 β (β') 代入朗肯主动、被动土压力计算表达式, 分别为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_a &= \gamma z \tan^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) - 2c \tan \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) = \\ &\quad \gamma z \tan^2 \beta - 2c \tan \beta \\ \sigma_p &= \gamma z \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + 2c \tan \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) = \\ &\quad \gamma z \tan^2 \beta' + 2c \tan \beta' \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

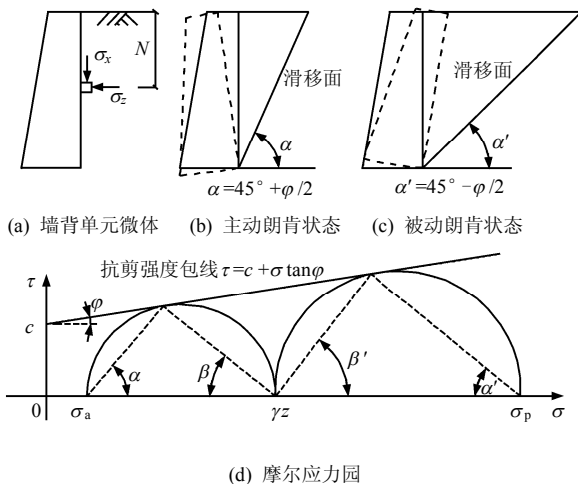


图1 半空间的极限平衡状态

Fig.1 The limit equilibrium state of half-space

2.2 土压力计算公式的导出

大量研究表明, 挡土墙的位移与土压力的关系曲线呈“S”型分布, 如图 2 所示。当土体处于任意非极限平衡状态 ($s_a < s < s_p$) 时, 其摩尔应力圆如图 3 中圆 I、II 所示。显然, 此时土体处于安全状态, 其抗剪强度包线为 $\tau'' = c'' + \sigma \tan \varphi''$, 其中 c'' 、 φ'' 分

别为此土体抗剪强度指标的发挥值。与 β (β') 同理得 $\eta = 45^\circ - \varphi''/2$, $\eta' = 45^\circ + \varphi''/2$ 。假定此时主动侧和被动侧土压力仍符合极限平衡条件式, 则对比式 (1) 可得

$$\left. \begin{aligned} p_a &= \gamma z \tan^2 \eta - 2c'' \tan \eta \\ p_p &= \gamma z \tan^2 \eta' + 2c'' \tan \eta' \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

为研究方便起见, 令 $\varphi'' = k_\varphi \varphi$, 其中 k_φ 为角度发挥系数, 可向负半轴推广, 即 k_φ 取负值时用于主动侧 ($s < 0$) 土压力的计算, 因此, η (η') 的表达式可统一为: $\eta(\eta') = 45^\circ + (k_\varphi \varphi)/2$ 。同理, 此时黏聚力也可表示为 $c'' = k_c c$, 其中 k_c 为黏聚力发挥系数。因而主 (被) 动土压力计算表达式可统一为

$$p = \gamma z \tan^2 \left(45^\circ + \frac{k_\varphi \varphi}{2} \right) + 2k_c c \tan \left(45^\circ + \frac{k_\varphi \varphi}{2} \right) \quad (3)$$

式中: k_φ 、 k_c 为分别为角度发挥系数和黏聚力发挥系数; γ 、 z 为分别为土体重度和土体计算深度; c 、 φ 为分别为计算土体黏聚力和内摩擦角; p 为与位移 s 相对应的土压力。

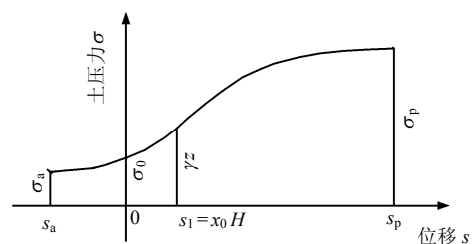


图2 位移-土压力关系

Fig.2 Relationship between displacement and earth pressure

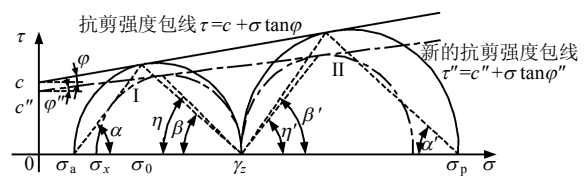


图3 任意非极限平衡状态下摩尔应力圆

Fig.3 Mohr stress circles at any non-limit equilibrium state

2.3 k_φ 、 k_c 与位移的关系

如图 1 所示, 当位移 $s_a < s \leq 0$ 时, 水平方向的土压力 $\sigma_a < p \leq k_0 \gamma z$, $-1 < k_\varphi \leq k_\varphi(0)$ ($k_\varphi(0)$ 为静止土压力所对应 k_φ 值); 当 $s \leq s_a$ 时, 达到主动极限平衡状态, k_φ 取 -1; 当位移 $0 < s \leq x_0 H$ ($x_0 H$ 为 $\sigma_x = \gamma z$ 时对应挡墙的位移量) 时, 水平方向的土压力 $k_0 \gamma z < p \leq \gamma z$, $k_\varphi(0) < k_\varphi \leq 0$; 当 (圆 II) 位移

$x_0 H < s \leq s_p$ 时, 水平方向的土压力 $\gamma z < p \leq \sigma_p$ 、 $0 < k_\phi \leq 1$; 当 $s \geq s_p$ 时, 达到被动极限平衡状态, k_ϕ 取 1。因此, 当挡土墙位移量由 s_a 逐渐增大到 s_p 的过程中, 相应的 σ_x 逐渐由 σ_a 增大到 σ_p , k_ϕ 则逐步由 -1 增大到 1 (由于朗肯理论假定墙背是光滑的, 因此, 这里没有考虑墙土间的外摩擦角 δ 的影响)。这表明, 挡土墙后土体随着其向着土体方向位移的变化相应地从主动极限平衡状态演变到被动极限平衡状态的整个过程是一个动态连续的过程, 在这一过程中, 位移、土压力和 k_ϕ 三者是一一对应的。根据图 2 位移与土压力关系, 将 k_ϕ 与位移关系曲线也假定为“S”型, 其表达式为

$$k_\phi(s) = \frac{A_1 - A_2}{1 + e^{(x-x_0)/B}} + A_2 \quad (4)$$

式中: A_1 、 A_2 、 B 、 x_0 为待定系数, 均与墙土之间的外摩擦角 δ 和土体内摩擦角 ϕ 有关 ($B > 0$); x 为挡土墙发生的相对位移量 $x = s/H$ (H 为挡土墙高); s 为挡土墙发生的实际位移量, 取向着土体方向位移为正;

待定系数的确定。对于砂性土, A_1 、 A_2 可根据边界条件得到 ($x \rightarrow \pm\infty$ 时, 据朗肯或库仑主被动土压力而得到); B 、 x_0 当实测值较多时, 可经过非线性拟合根据方差最小而得到; 当实测值较少时, 可以取有代表性的两点坐标 (s_1, p_1) , (s_2, p_2) 通过计算确定。对于黏性土: 当实测值较多时, A_1 、 A_2 、 B 、 x_0 可经过非线性拟合根据方差最小而得到; 当实测值较少时, 可以取有代表性的 4 点坐标联立求解得到。

k_c 值也与位移变化有关。当土体处于静止状态时 ($s=0$), c 值几乎不发挥, 土压力的分布仅仅与土的内摩擦角有关, 静止土压力的经验计算公式 $p = k_0 \gamma z = (1 - \sin \phi') \gamma z$ 也说明了此点。当土体处于主动或被动极限平衡状态时, c 值会充分发挥, 达到其最大值, 此时的 Rankine 主动或被动土压力的表达式 $p = \gamma z \tan^2 \left(45^\circ \pm \frac{\phi}{2} \right) \pm 2c \tan \left(45^\circ \pm \frac{\phi}{2} \right)$ 也能说明此点。因此, 可以假定 $k_c(s)$ 与土体位移成线性分布, 即 $k_c(s) = \frac{s}{|s_i|}$, 其中: s 取向着土体位移时为正; $i = a, p$, 向着 (或背离) 土体位移取 p (或 a); 当 $k_c > 1$ 时, 取 1; 当 $k_c < -1$ 时, 取 -1。

2.4 计算模式特点分析

本文位移土压力计算模式具有以下特点:

①当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $k_\phi \rightarrow A_1$ (故 $A_1 < 0$), 若不考虑墙土之间摩擦 δ 的影响, 则 $A_1 = -1$, $k_c = -1$,

$p = \gamma z \tan^2 (45^\circ - \phi/2) - 2c \tan (45^\circ - \phi/2)$ 为朗肯主动土压力。

②当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $k_\phi \rightarrow A_2$ (故 $A_2 > 0$); 若不考虑墙土之间摩擦 δ 的影响, 则 $A_2 = 1$, $k_c = 1$ 。土压力 $p = \gamma z \tan^2 (45^\circ + \phi/2) + 2c \tan (45^\circ + \phi/2)$ 为朗肯被动土压力。

③当 $x = 0$ 时, $k_\phi = \frac{A_1 - A_2}{1 + e^{-x_0/B}} + A_2$, 若不考虑墙土之间摩擦的影响, 则将 $A_1 = -1$ 和 $A_2 = 1$, $k_c = 0$ 代入, $p = \gamma z \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi}{2} - \frac{\phi}{1 + e^{-x_0/B}} \right)$ 为静止土压力, 其中: $\tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi}{2} - \frac{\phi}{1 + e^{-x_0/B}} \right)$ 还可以用于估算 k_0 值。

对于无黏性土, 式(3)还有如下特点:

①考虑墙土之间摩擦的影响。当考虑 δ 的影响时, A_1 由库仑主动土压力系数确定, A_2 由库仑被动土压力系数确定。

②当 $x = x_0$ 时, $k_\phi = (A_1 + A_2)/2$, 若不考虑墙土之间摩擦的影响则 $k_\phi = 0$, $p = \gamma z$, 即土压力由静止土压力逐步增大到被动土压力的过程中, 竖向应力和水平向应力相等的临界状态。

③单调递增性

因 $\frac{\partial k_\phi}{\partial x} = -\frac{A_1 - A_2}{B} \left[\frac{e^{(x-x_0)/B}}{[1 + e^{(x-x_0)/B}]^2} \right]$, 且 $A_1 - A_2 < 0$, $B > 0$, 故 $\frac{\partial k_\phi}{\partial x} > 0$, 所以, $k_\phi(s)$ 随位移单调递增, 从而使得土压力 p 也单调递增;

④在 $x = x_0$ 处, k_ϕ 出现拐点, 当 $x > x_0$, $\partial^2 k_\phi / \partial x^2 < 0$, 即曲线开口向下时, 此时水平向应力大于竖向应力 γz , 为大主应力; 当 $x < x_0$, $\partial^2 k_\phi / \partial x^2 > 0$, 即曲线开口向上时, 此时水平向应力小于竖向应力 γz , 为小主应力; 当 $x = x_0$, $\partial^2 k_\phi / \partial x^2 = 0$, 为临界状态, 此时水平向应力等于竖向应力均为 γz , 滑裂面与水平方向成 45° 夹角。

由此可见, 土压力计算模式物理内涵丰富。除了能统一表达主动、被动极限状态下的土压力以及静止土压力外, 还能随水平位移连续变化而囊括任意非极限状态下的主动或被动土压力。与朗肯土压力理论相比, 它还可考虑墙土之间的外摩擦角的影响。此外, 它还能提供一种新的估算 k_0 的方法和确定挡土墙后填土大小主应力转换的临界位移量。

3 算例分析

为验证本文土压力计算模式的合理性, 取模型试验结果分别对主动土压力和被动土压力加以验

证。这里先以分析砂性土,对于黏性土则另著文论述。

3.1 被动侧土压力

取徐日庆^[3]等的模型试验中 T 变位下的试验数据做对比分析,模型装置及试验采用的杭州钱塘江风干河砂详细参数见文献^[3],主要参数为:实际干重度为 15.642 kN/m^3 ,砂土的内摩擦角 $\varphi=34.2^\circ$ 。测点布置如图4所示。

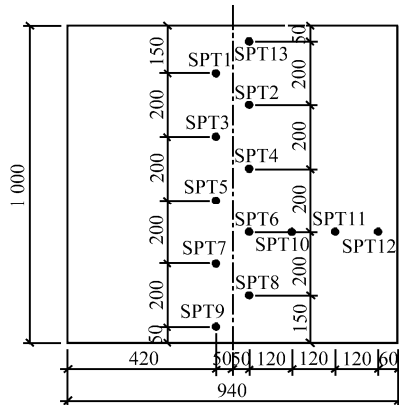


图4 测点布置图(单位: mm)

Fig.4 Locations of measuring points (unit: mm)

取墙土间外摩擦角 $\delta = 2\varphi/3 = 22.8^\circ$, 各计算参数为: $A_1 = -1.070$, $A_2 = 1.561$, $x_0 = 0.01123$, $B = 0.01344$ 。

图5为不同深度处的各测点被动土压力随位移的变化曲线。通过对比可以看出,实测值和用考虑位移的模式计算值随位移变化趋势是一致的,数值上也基本吻合。图6为不同位移下挡墙被动侧土压力的分布对比图。当 $s=0$ 时,计算值、实测值以及理论静止土压力值 ($p = k_0 \gamma z = (1 - \sin \varphi') \gamma z$, 其中 $\varphi' = \varphi + 2^\circ$), 三者比较接近,实测值位于计算值与理论值之间。因此,使用计算式 $k_0 = \tan^2(45^\circ +$

$\frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{1 + e^{-x_0/B}}$), 即(式(7))来估算 k_0 有时也不失为一种有效的计算方法;当 $s=0.03H$ 时,计算值与按朗肯被动土压力理论的计算值十分接近,从而表明 $s=0.03H$ 已经满足了达到朗肯被动极限平衡状态所需的位移量,这与大多数专家学者的观点是相符的;当 $s \geq 0.07H$ 时,土压力的计算值与按库仑被动土压力理论的计算值十分接近,表明 $s=0.07H$ 时基本达到了库仑被动极限平衡状态所需的位移量。

从整体上来看,计算值与实测值吻合较好,当位移量较小(如 $s=0.005H$, $0.015H$, $0.030H$, 其中 $x = s/H$ 为相对位移量)计算值较实测值稍偏

小;当位移较大 ($s=0.070H$, $0.085H$, $0.100H$) 时,挡墙上部土压力计算值偏小,下部计算值偏大,综合来看,计算值和实测值吻合较好,从而表明用该计算模式来计算被动土压力是比较合理的。

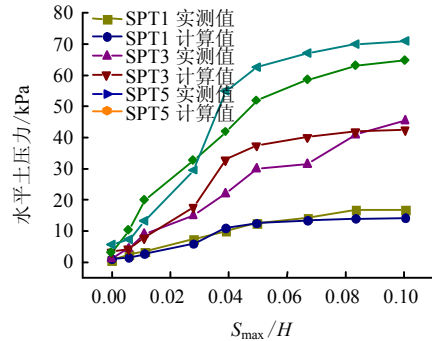


图5 被动土压力随位移变化的对比图

Fig.5 Comparison between passive earth pressure and change of displacement

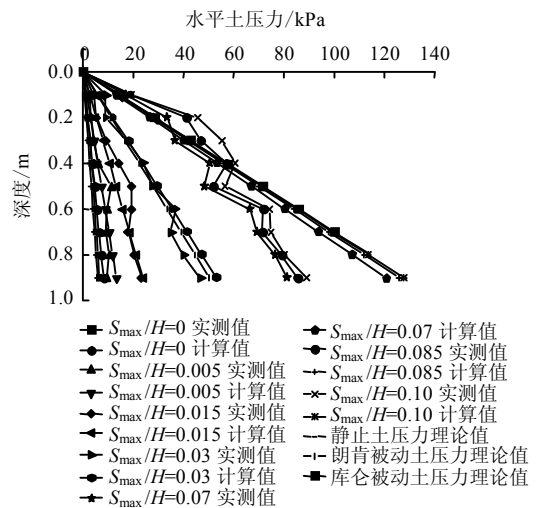


图6 挡墙上被动侧土压力的分布对比

Fig.6 Comparison of the distribution of lateral earth pressure on the passive side

图7为被动侧土压力系数的实测值、计算值和理论计算值随位移变化的对比图,其中实测值是由实测土压力值反算得到的,计算表达式为 $k_p = \frac{p}{\gamma z}$ (取各测点计算值的平均值)。图7表明,实测值和计算值都随位移量的增大而呈非线性增大,其变化趋势基本相同,都介于静止土压力系数和库仑被动土压力系数之间。当挡墙位移为0时,计算值和实测值都与静止土压力系数基本重合,随着位移的逐渐增大,其土压力都同时增大;当位移量 $s=0.03H$ 时,土压力系数都几乎同时达到朗肯被动土压力系数值,随着位移的进一步增大,土压力系数也进一步

增大,并最终趋向于库仑被动土压力系数值。相对而言,计算值比实测值更易达到极限值,当位移量 $s=0.07H$ 时计算值就基本上达到或接近达到库仑被动土压力系数值,这与图 4 结论基本吻合。

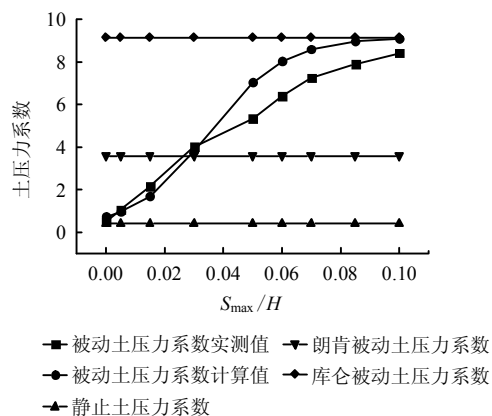


图 7 土压力系数随位移变化曲线

Fig.7 The curves of the coefficient of earth pressure and the wall's displacement

3.2 主动侧土压力

本文计算模式同样可用于主动侧土压力的计算,这里取周应英等^[6]的砂土模型试验数据做对比分析。试验用砂主要指标:重度为 12.56 kN/m^3 ,砂土的内摩擦角 $\varphi=34^\circ$,试验装置及土样详细参数见文献^[6]。计算位移土压力时参数: $\delta=2\varphi/3=22.7^\circ$, $A_1=-1.0706$, $A_2=1.559$, $x_0=0.00301$, $B=0.00155$ 。取 $s=0$ 、 $s=-8 \text{ mm}$ 和 $s=-3.5 \text{ mm}$ 的挡墙平动的 3 种情形(负号代表挡墙向着背离土体发生位移)作挡墙上土压力的分布对比分析,如图 8 所示。当 $s=0$ 时,土压力的计算值和实测值吻合较好,且与静止土压力的理论值(计算方法和上例相同)比较接近,而理论值稍稍偏大;当 $s=-3.5 \text{ mm}$ 时,挡墙顶部和底部的计算值和实测值吻合较好,挡墙中部计算值和实测值有稍大差异(分析原因可能是土的成拱效应所致);当 $s=-8 \text{ mm}$ 时,挡墙上部计算值和实测值吻合较好,下部差异较大,但与库仑理论土压力基本重合,较朗肯理论值小,因而采用本方法计算结果更接近于实测值。总体来看,计算值和实测值不管是从其分布趋势,还是从数值上,二者都基本吻合,且与朗肯主动土压力理论值和静止土压力理论值相比较,采用本文方法更加接近实测值。因此,采用本文计算模式计算主动侧土压力与理论值相比,更能反映挡墙上土压力的实际情况,也更合理些。

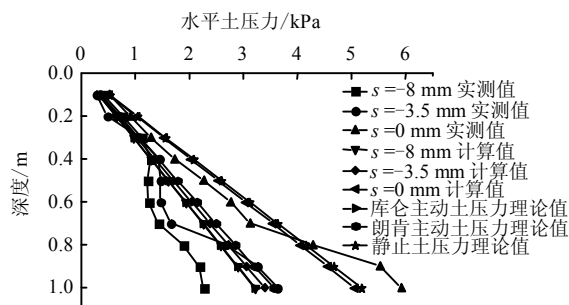


图 8 挡墙上主动侧土压力分布对比

Fig.8 Comparison of the distribution of lateral earth pressure on the active side

4 结 论

(1) 本文基于朗肯土压力理论,建立了能统一表达主动、被动极限状态下的土压力以及静止土压力的位移土压力计算模式,该模式随位移变化是连续的,且能考虑墙土间的摩擦影响;而经典土压力理论仅仅适用于位移区间在 $(-\infty, s_a)$ 和 $(s_p, +\infty)$ 的部分区域或者说是部分片段。

(2) 通过与徐日庆等的 T 变位时的被动土压力的模型试验结果及周应英等的砂土的主动土压力的模型试验结果对比分析表明,用本文计算模式计算无黏性土位移土压力是合理的。

(3) 根据本文计算模式,推导出了一种新的估算砂土 k_0 的计算方法,其计算表达式为式(7),与实测值的对比结果表明是可行的。

参 考 文 献

- [1] BANG S. Active earth pressure behind retaining walls[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1985, 111(3): 407-412.
- [2] FANG Y S, ISHIBASHI I. Static earth pressure with various wall movements[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1986, 112(3): 317-333.
- [3] 徐日庆, 陈页开, 杨仲轩, 等. 刚性挡墙被动土压力模型试验研究[J]. *岩土工程学报*, 2002, 24(5): 569-575. XU Ri-qing, CHEN Ye-kai, YANG Zhong-xuan, et al. Experimental research on the passive earth pressure acting on a rigid wall[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2002, 24(5): 569-575.
- [4] ICHIHARA M, MATSUZAWA H. Earth pressure during earthquake[J]. *Soils and Foundations*, 1973, 13: 75-86.
- [5] SHERIF M A, ISHIBASHI I, LEE C D. Earth pressures against rigid retaining walls[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1982, 108(5): 679-695.

-
- [6] 周应英, 任美龙. 刚性挡土墙主动土压力的试验研究[J]. 岩土工程学报, 1990, 12(2): 19—26.
ZHOU Ying-ying, REN Mei-long. An experiment study on active earth pressure behind rigid retaining wall[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 1990, 12(2): 19—26.
- [7] CHANG M F. Lateral earth pressure behind rotating wall[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1997, 34(2): 498—509.
- [8] 蒋波, 应宏伟, 谢康和, 等. 平动模式下挡土墙非极限状态主动土压力计算[J]. 中国公路学报, 2005, 18(2): 24—27.
JIANG Bo, YING Hong-wei, XIE Kang-he, et al. Computation of active earth pressure under non-limit state for retaining wall with mode of translation[J]. **China Journal of Highway and Transport**, 2005, 18(2): 24—27.